黑河学院课程教案

<table>
<tr><td rowspan="2">课程
类型</td><td>必修</td><td>公共基础课（ ）；专业基础课（ ）；专业课（√ ）</td><td rowspan="2">考核
方式</td><td rowspan="2">考试（√ ）；
考查（ ）</td></tr>
<tr><td>选修</td><td>限选课（ ）；任选课（√ ）</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="4">第一章 曲线论
第三节 向量函数（第一讲）</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：了解向量函数及其极限、连续性和微商等概念；掌握向量函数极限和微商的运算性质；会计算向量函数的极限与微商，会判别向量函数的连续性。
能力目标：培养学生极限和微商的计算能力以及学科知识的交叉能力。
思政育人目标：培养学生严谨治学、积极探索、坚韧不拨、勇于进取的科学品质；激激发学生的学习兴趣和科学热情；领悟国人的高度智慧，增强民族自信心、自豪感。</td></tr>
<tr><td>教 学
重 点
难 点</td><td colspan="4">教学重点：向量函数极限的概念与性质；向量函数的连续性；向量函数的微商与性质。
教学难点：计算向量函数的极限、微商；判别向量函数的连续性。</td></tr>
<tr><td>思政映射
与融入点</td><td colspan="4">融入点（一）：向量函数极限及其性质、连续性和微商及其性质
思政点（一）映射：通过实函数与向量函数在极限、连续性和微商定义上的类比，深化概念的理解，培养学生治学严谨治学的科学品质。
融入点（二）：坐标表示下向量函数微商的计算
思政点（二）映射：通过引入向量函数的坐标表示，以及向量函数极限、连续性和微商在坐标分量的表现，使学生领会微分几何中微积分与几何学的交叉融合，激发学生学习兴趣和科学热情。
融入点（三）：微分几何相关的名人事迹（陈省身、爱因斯坦）
思政点（三）映射：授新课前，介绍微分几何之父我国著名数学家陈省身的先进事迹，让学生领悟国人的高度智慧，增强民族自信心、自豪感；介绍爱因斯坦发现相对论之前，自学十年微分几何的事迹，让学生领会微分几何的重要作用，以及大师级人物的人格魅力，培养学生崇尚科学、积极探索、坚韧不拨、勇于进取的科学品质</td></tr>
<tr><td>教学方法
和手段</td><td colspan="4">教学方法：讲授法、讨论法
教学手段：多媒体辅助</td></tr>
<tr><td>教学过程</td><td colspan="4">课程介绍
1.微分几何的发展历程。
2.微分几何之父——陈省身先进事迹。（思政融入点：让学生领悟国人的高度智慧，增强民族自信心、自豪感）
3.爱因斯坦发现相对论自学十年微分几何的故事。（思政融入点：让学生领会微分几何的重要作用，以及大师级人物的人格魅力，培养学生崇尚科学、积极探索、坚韧不拨、勇于进取的科学品质）</td></tr>
</table>

向量函数的概念：给出一点集 G ，如果对于 G 中的每一个点 x ，有一个确定的向量 $\vec{r}$ 和它对应，则在 G 上给定了一个向量函数，记作 $\vec{r}=\vec{r}(x), x\in G,$

一元向量函数 $\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,b]$

二元向量函数 $\vec{r}=\vec{r}(u,v), (u,v)\in$ 平面域 G

三元向量函数 $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z), (x,y,z)\in$ 空间域 G

1.1 向量函数的极限

1.1.1 定义 1（与实函数极限定义类比，给出几何解释。思政融入点：培养学生治学严谨治学的科学品质）

设 $\vec{r}(t)$ 是所给的一元函数，$\vec{a}$ 是常向量，如果对任给的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta>0$，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时,有 $|\vec{r}(t)-\vec{a}|<\varepsilon$ 成立，则说当 $t\to t_0$ 时，向量函数 $\vec{r}(t)$ 趋向于极限 $\vec{a}$，记作 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

1.1.2 向量函数的性质

命题 1（结合解析几何知识，与实函数极限定义类比。思政融入点：培养学生治学严谨治学的科学品质）

如果 $\vec{r}(t)$ 和 $\vec{s}(t)$ 是两个一元函数，$\lambda(t)$ 是一个实函数，并且当 $t\to t_0$ 时，$\vec{r}(t)\to\vec{a}, \vec{s}(t)\to\vec{b}, \lambda(t)\to m$,则有

（1）两向量之和（差）的极限等于极限之和（差）。$\vec{r}(t)\pm\vec{s}(t)=\vec{a}\pm\vec{b}$

（2）数乘向量的极限等于极限的乘积。$\lambda(t)\vec{r}(t)\to m\vec{a}$

（3）数量积的极限等于极限的数量积。$\vec{r}(t)\vec{s}(t)\to\vec{a}\vec{b}$

（4）向量积的极限等于极限的向量积。$\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\to\vec{a}\times\vec{b}$

1.2 向量函数的连续性

1.2.1 连续性（与实函数连续性定义类比，给出几何解释。思政融入点：培养学生治学严谨治学的科学品质）

给出一元向量函数 $\vec{r}(t)$，当 $t\to t_0$ 时，若向量函数 $\vec{r}(t)\to\vec{r}(t_0)$,则称向量函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 点是连续的。也有 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

1.2.2 区间上连续　如果 $\vec{r}(t)$ 在闭区间 $[t_1,t_2]$ 的每一点都连续,则称 $\vec{r}(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上是连续的。

1.2.3 命题 2　如果 $\vec{r}(t)$ 和 $\vec{s}(t)$ 是在点 t_0 连续的向量函数，而 $\lambda(t)$ 是点 t_0 连续的实函数，则向量函数 $\vec{r}(t)\pm\vec{s}(t)$，$\vec{r}(t)\vec{s}(t)$，$\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$，和实数 $\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$ 也都有在 t_0 点连续（把命题中的点 t_0 改为区间 $[t,t_0]$ 时，命题也成立）。

1.3 向量函数的微商（与实函数微商定义类比，给出几何解释。思政融入点：培养学生治学严谨治学的科学品质）

1.3.定义 2　设 $\vec{r}(t)$ 是定义在区间 $[t_1,t_2]$ 上的向量函数，设 $t\in(t_1,t_2)$，如果极限

	$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ 存在，则称 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 点是可微分的，这个极限称为 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 点的微商（或导矢）。 记为 $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=t_0}$ 或 $\vec{r}\,'(t_0)$. 即 $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=t_0}=\vec{r}\,'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ 如果 $\vec{r}(t)$ 在某个开区间的每一点都有微商存在，则说 $\vec{r}(t)$ 在此区间内是可微的或简称向量函数 $\vec{r}(t)$ 是可微的，它的微商记为 $\vec{r}\,'(t)$. **1.3.2 命题 3**（结合解析几何知识，与实函数微商定义类比，几何解释，思政融入点：培养学生治学严谨治学的科学品质） 设 $\vec{r}(t)$ ，$\vec{s}(t)$ ，$\vec{u}(t)$ 分别是可微的向量函数，$\lambda(t)$ 是可微的实函数，则 $\lambda(t)\vec{r}(t)$ ，$\vec{r}(t)\pm\vec{s}(t)$ ， $\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$ ，和实数 $\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$ 都是可微函数，并且 $(\lambda\vec{r})'=\lambda'\vec{r}+\lambda r,(\vec{r}\pm\vec{s})'=\vec{r}\,'\pm\vec{s}\,',$ $(\vec{r}\times\vec{s})'=\vec{r}\,'\times\vec{s}+\vec{r}\times\vec{s}\,',$ $(\vec{r}\cdot\vec{s})'=\vec{r}\,'\cdot\vec{s}+\vec{r}\cdot\vec{s}\,',(\vec{r},\vec{s},\vec{u})'=(\vec{r}\,',\vec{s},\vec{u})+(\vec{r},\vec{s}\,',\vec{u})+(\vec{r},\vec{s},\vec{u}\,')$ **1.3.3 定义 3**　向量函数 $\vec{r}(t)$ 的微商 $\vec{r}\,'(t)$ 仍为 t 的一个向量函数，如果函数 $\vec{r}\,'(t)$ 也是连续和可微的，则 $\vec{r}\,'(t)$ 的微商 $\vec{r}\,''(t)$ 称为 $\vec{r}(t)$ 的二阶微商。 类似可定义三阶、四阶微商。如 $\vec{r}\,'''(t)$ ，$\vec{r}^{(n)}(t)$ **1.3.4 定义 4**　区间 $[t_1,t_2]$ 上直到 k 阶连续微商的函数称为这区间上的 k 次可微函数或 C^k 类函数，连续函数也称为 C^0 类函数，无限可微的函数记为 C^∞ 类函数。解析函数记为 C^ω 类函数。 **1.3.5 命题 4**　任一向量函数 $\vec{r}(t)$ 与三个实函数 $x(t),y(t),z(t)$ 一一对应，即有 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2+z(t)\vec{e}_3$ **1.3.6 命题 5**　如果向量函数 $\vec{r}(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是 C^k 类函数，则向量函数所对的三个实函数 $x(t),y(t),z(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是 C^k 类函数。 **证明** 将 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2+z(t)\vec{e}_3$ 两边点乘 $\vec{e}_1$ 得 $x(t)=\vec{r}(t)\cdot\vec{e}_1$ ，由于 $\vec{e}_1$ 是常向量，而 $\vec{r}(t)$ 是 C^k 类的，所以 $x(t)$ 是 C^k 类函数。同理，$x(t)$ 和 $y(t)$ 也都是 C^k 类函数。 **1.3.7 命题 6**（思政融入点：使学生领会微分几何中微积分与几何学的交叉融合，激发学生学习兴趣和科学热情） $\vec{r}=\{x(t),y(t),z(t)\}\Rightarrow\vec{r}\,'=\{x'(t),y'(t),z'(t)\},\cdots$ **小结：** 1.向量函数的概念； 2.向量函数的极限与性质 3.向量函数的连续性 4.向量函数的微商与性质

	5. C^k 类函数的概念 6.限量函数的坐标表示 7.坐标下向量函数的微商
作业题和思考题布置	**作业题**：12 页 5、6 题 **思考题**：如果给出向量函数的坐标分解式
参考资料	《微分几何》 陈维恒 北京大学出版社 《微分几何》 彭家贵 高等教育出版社 《整体微分几何初步》沈一兵 高等教育出版社
要求自学内容	数学分析中函数极限、连续性、微商的定义，以及极限和微商运算律的证明。
双语内容	无
教学后记（经验教训、学生反映、改进意见）	通过本次课的学习，大部分学生能够清楚向量函数及其极限、连续性和微商等概念，掌握向量函数极限和微商的运算性质，并会计算向量函数的极限与微商，以及判别向量函数的连续性。极限和微商的计算能力以及学科知识的交叉能力有所提高，思政融入点与知识衔接紧密，并显示出较好的思政影响效果。课上学生听课认真，讨论积极，只有少数几个学生对微商的证明存在一些小问题，通过指导，学生有信心自己能够独立完成证明。
教研室主任审查签字	