

黑河学院课程教案

课 程 类 型	必修	公共基础课 () ; 专业基础课 (√) ; 专业课 ()	考 核 方 式	考 试 (√) ; 考 查 ()
	选修	限选课 () ; 任选课 ()		
章 节 名 称	第六章 向量空间 6.3 向量的线性相关性			
教 学 目 的	<p>知识目标：数学的理论研究是人类认识自然、探索宇宙的基本工具，数学在生产实际中的应用，更是人类创造美好生活、不断取得进步的强大武器。</p> <p>能力目标：正确理解和掌握向量组的线性相关性的概念及性质，掌握判断向量组线性关系的一般方法和特殊方法，理解向量组极大线性无关组、向量组的秩的概念，掌握求解向量组的秩及其极大线性无关组的方法，感悟透过现象看本质，通过规律抽象归纳，将问题“化繁为简”，从“形变质不变”看事物变化，感受线性代数的抽象美、逻辑美、形式美等提高辩证思维能力和应用能力。。</p> <p>思政育人目标：团结协作、永不言弃、努力学习具备核心竞争力，成为更好的我们。</p>			
教 学 重 点 难 点	<p>重点：线性相关性及其理论。</p> <p>难点：线性相关性理论。</p>			
教 学 方 法 和 手 段	<p>教学方法：讲授法、讲练结合</p> <p>教学手段：线上线下混合</p>			
教 学 过 程	<p>课前在推送《夺冠》电影片段，引发讨论，为课中展开教学内容奠定基础。</p> <p>课中：围绕《夺冠》片段中郎平推行的“大国家队模式”改革展开本节内容的教学。将“核心竞争力”映射到“线性无关”，引导学生努力学习，增强技能，提升自己未来行业中的竞争力。将“组队上场比赛的小组”对应“极大线性无关组”，谈班委成员对班级凝聚力、团结协作力的影响等。</p> <div style="text-align: center;"> <h2>DISCUSSION TIME</h2>  <p>The discussion content includes a video poster for the movie '夺冠' (Champion) and several discussion questions:</p> <ul style="list-style-type: none"> 《夺冠》 最深的感触是什么？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平推行大国家队模式，朱婷、惠若琪、袁心玥、张常宁、丁霞等为何会被选中？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平推行大国家队模式，朱婷、惠若琪、袁心玥、张常宁等为何会被选中？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平组建比赛梯队时，人员的配置是怎样一种状态？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平推行大国家队模式，朱婷、惠若琪、张常宁等为何会被选中？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平组建比赛梯队时，人员的配置是怎样一种状态？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 这种“刚刚好”的状态如何描述？ * 刚刚好 * 多一个不能再多，少一个不能再少 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平推行大国家队模式，朱婷、惠若琪、张常宁等为何会被选中？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 郎平组建比赛梯队时，人员的配置是怎样一种状态？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 这种“刚刚好”的状态如何描述？ 《夺冠》 《敢于拼搏》 组建比赛梯队的方式唯一吗？组队的人数唯一吗？ </div>			

一、导入新课

复习线性空间的概念。

一、讲授新课（讲授法，讲练结合，定义，定理多媒体投影，例题演练黑板）

1、线性相关与线性无关

(1) 线性组合、线性表示及其性质

定义 1: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是线性空间 V 的 r 个向量, a_1, a_2, \dots, a_r 是数域 F 中任意 r 个数, 我们把和 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_r\alpha_r$ 叫做向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的一个线性组合。

定义 2: 若 V 中向量 α 可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性组合, 即 $\exists a_1, a_2, \dots, a_r \in F$ 使得 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_r\alpha_r$, 则称 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

性质: 命题 6.3.1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中每一向量都可以由这一组向量线性表示。

命题 6.3.2 若向量 γ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表示, 而每个 β_i 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 则 γ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示。

(2) 线性相关、线性无关及有关性质

定义 3: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是线性空间 V 的 r 个向量, 若存在数域 F 中 r 个不全为 0 的数 a_1, a_2, \dots, a_r 使得 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_r\alpha_r = 0$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 否则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关。

例 1: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 中有一个零向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 一定线性相关。

例 2: 判断 F^3 中向量 $\alpha_1 = (1, -2, 3), \alpha_2 = (2, 1, 0), \alpha_3 = (1, -7, 9)$ 是否线性相关

例 3: 在 $F[x]$ 中对任意非负整数 n , 证明 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 线性无关。

性质: 命题 6.3.3: 若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关, 则它的任一部分向量组也线性无关; 等价地: 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 有一部分组线性相关, 则整个向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 也线性相关。

命题 6.3.4: 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性无关, 而 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta\}$ 线性相关, 则 β 一定可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 且表示法唯一。

3、极大无关组（讨论一个非零向量组的一种部分组）（向量组的秩）

引入: 夺冠电影片段讨论思考: 埋伏笔、奠基础（课程思政: 团结协作、永不言弃、努力学习具备核心竞争力, 成为更好的我们!）

抽象归纳: 将挑选队员组队的过程反映在向量组中, 给出极大线性无关组确切的数学定义。

举例进一步说明向量组的极大无关组可能不唯一, 正如挑选上场比赛队员的组队方式可能不唯一。

研究性质: 为何选取极大无关组? 极大无关组可能不唯一, 内在有何联系? ——化繁为简。

发现规律本质, 给出等价定义 变中不变——向量组的秩

寻找求解方法, 举例演示 列向量组→按列构成矩阵→化为行最简形→极大线性无关组、秩及其余向量的线性表示显而易见。

思想演绎 3 原色调制多彩世界

归纳提升 极大线性无关组——组队上场比赛的队员（原向量组的等价组）

向量组的秩——上场比赛的队员人数（变中不变）

初等行变换——组队的过程（变中不变）

	<p>定义 5: 向量组 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}\}$ 是向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 的一个部分组 ($r \leq n$), 若满足: 1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关; 2) 每个 $\alpha_j (j=1, \dots, n)$ 都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表示。则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组的一个极大线性无关部分组 (简称极大无关组)。</p> <p>推论 6.3.8 等价的向量组的极大无关组含有相同个数的向量。特别地, 一个向量组的任意两个极大无关组含有相同个数的向量。</p> <p>极大无关组的求法:</p> <p>1) 一般方法: 逐步添加法——设给定 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求其一个极大无关组。先从 α_1 考虑, 若 $\alpha_1 \neq 0$, 保留; 考虑 α_1, α_2 看其是否线性无关。无关, 保留; 相关舍去 α_2, 考虑 α_1, α_3 看其是否线性无关。依次类推直至 α_n, 便得。(由于考虑次序不同可得不同的极大无关组)</p> <p>例: 求向量组 $\{1, x, x+2, x^2+2x+3\}$ 的一个极大无关组。</p> <p>2) 特殊方法——对 F^n 中向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求极大无关组。</p> <p>首先: 可以证明“命题”: “设 $M_{n \times m}(F)$ 的矩阵 A 经过行的初等变换得到 $M_{n \times m}(F)$ 的矩阵 B, 则 A 与 B 的列向量有相同的线性关系。”</p> <p>这样可得: A) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in F^n$ 的线性关系, 可以以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 列作矩阵 A, 通过对 A 作行初等变换化为标准形 B, 由 B 的列向量的线性关系可得 A 的列向量的线性关系。进而</p> <p>B) 用上述方法可求 F^n 中向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 的极大无关组。</p> <p>例: 求 R^3 中向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (3, 0, 4), \alpha_4 = (5, 1, 6)$ 的一个极大无关组。</p> <p>课上练习: P234 1.</p> <p>教育学家杜威曾说: “教之于学, 犹如卖之于买。没有人把东西买走, 不能说把东西卖掉了。” 利用智慧教学工具开展线上线下混合式教学, 对学生的自律、自学能力要求更高, 老师不能“替学”只能“引起、维持和促进学习”。所以自己在教学中, 还应多反思、多摸索、多尝试。对学生, 多鼓励、多引导、多肯定。怀着“一棵树摇动另一棵树, 一朵云推动另一朵云, 一个灵魂唤醒另一个灵魂”的教育情怀, 与学生一起成为更好的我们!</p>
作业题和思考题布置	P234 2, 3 查询和搜索华罗庚与线性方程组相关资料。
参 考 资 料	1. 复习教材和笔记中本章内容。 2. 让学生阅读北京师范大学, 高等代数 第六章 3. 让学生阅读《高等代数辅助教材》第六章。
要求自学内容	
双语内容	

教学后记 (经验教 训、学生反 映、改进意 见)	
教研室主 任审查签 字	